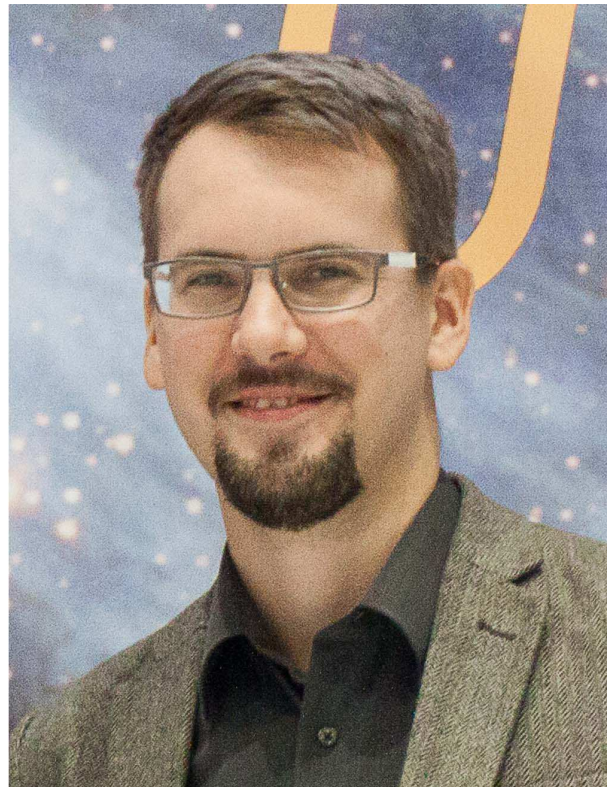
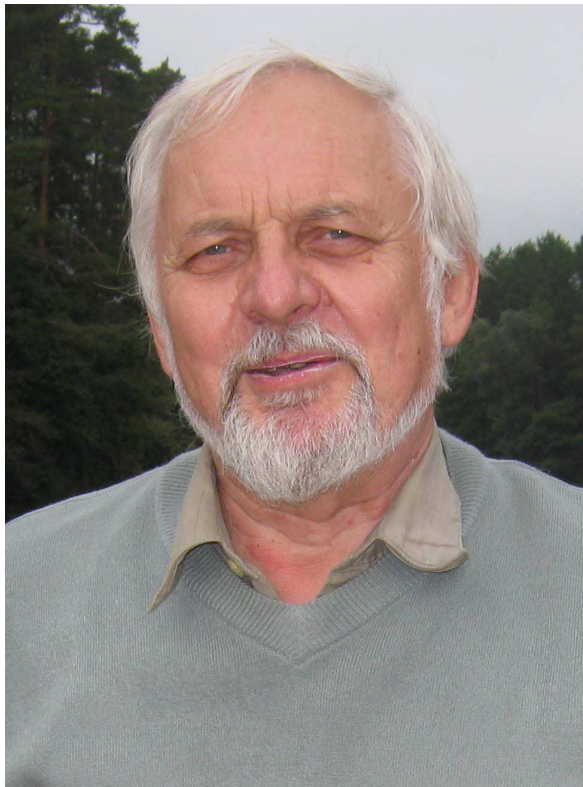


ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов

Статистические космологические системы фермионов с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием



Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

УДК 530.12+531.51

СТАТИСТИЧЕСКИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ФЕРМИОНОВ С МЕЖЧАСТИЧНЫМ ФАНТОМНЫМ СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.Г. Игнатьев¹, А.А. Агафонов²

¹ ignatov_yu@rambler.ru; Казанский федеральный университет

² a.a.agathonov@gmail.com; Казанский федеральный университет

Исследуется космологическая эволюция статистических систем фермионов с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, в котором вклад в полную энергию скалярного поля “кинетического” члена отрицателен. В результате аналитического и численного моделирования таких систем выявлено наличие четырех возможных сценариев в зависимости от параметров системы и начальных условий. Среди выявленных сценариев присутствуют сценарии с ранней, промежуточной и поздней нерелятивистской стадией космологической эволюции при одновременном наличии необходимой инфляционной стадии.

Ключевые слова: физика ранней Вселенной, связь физики элементарных частиц и космологии, инфляция, фантомное скалярное взаимодействие.

1. Введение

Фундаментальные скалярные поля играют важную роль в понимании динамики ранней Вселенной (см., например, [1], [2]) и с помощью различных модификаций теории гравитации, предложенных как самим А. Эйнштейном [4] (космологический Λ - член), так впоследствии Р. Утиями и Т. Фукуяма [4], А. Минкевич [5], [6] (Poincaré gauge theory of gravity), А. Старобинский [7] ($f(R)$ - гравитация), по-видимому, способны объяснить некоторые основные наблюдательные факты космологии. Тем не менее, некоторые важные факты наблюдательной космологии до сих пор не нашли достаточно убедительного объяснения в рамках стандартного космологического сценария. К таким очевидным фактам, относится, например, существование нерелятивистского этапа расширения Вселенной, необходимого для образования ее структуры. В связи, в частности, и с этим обстоятельством в настоящее время рассматривается широкий спектр феноменологических теорий фундаментального неминимально связанного скалярного поля, в которых вводятся различные связи между скалярным и гравитационным полями (потенциальная, кинетическая, комбинированная). Соответствующие теоретико - полевые конструкции преследуют обычно следующую цель: подобрать такой феноменологический Лагранжиан взаимодействия и его параметры, который обеспечивает космологический сценарий всеми необходимыми этапами: инфляция \rightarrow ультрарелятивистский этап \rightarrow нерелятивистский этап \rightarrow вторичное ускорение. При этом, предшествующий стандартный космологический сценарий, общепринятый в 60-80-е годы XX-го столетия (горячая модель Гамова) встраивается между этапами раннего и позднего космологического ускорения.

В этой статье мы рассматриваем космологические модели, построенные на фундаментальном скалярном взаимодействии. В отличие от феноменологических

неминимальных моделей скалярного взаимодействия мы рассмотрим динамические модели статистических систем скалярно заряженных частиц, в которых некоторые сорта частиц могут прямым образом взаимодействовать со скалярным полем через некоторый фундаментальный *скалярный заряд*. Статистическая система, обладая, скалярным зарядом и сама являясь источником скалярного поля, может эффективно влиять на скалярное поле, управляя его поведением. Такое скалярное взаимодействие было введено в общерелятивистскую кинетическую теорию в 1982 г одним из авторов статьи [8]-[11] и несколько позже - Г.Г. Ивановым [12].

Перейдем теперь к вопросам численного моделирования космологической эволюции статистических систем с межчастичным *фантомным скалярным взаимодействием*, обладающим отрицательной «кинетической» энергией. С математической точки зрения система дифференциальных уравнений, описывающих космологическую эволюцию таких динамических систем относится к классу жестких систем, численное моделирование которых сопряжено с весьма большими вычислительными трудностями. Жесткий характер системы обусловлен, в первую очередь, уравнениями Эйнштейна, в левой части которых содержится квадрат «постоянной» Хаббла, а в правой содержится знакопеременное выражение, знак которого определяется игрой двух факторов - отрицательной кинетической энергии и положительной потенциальной. Некоторые результаты численного моделирования таких систем были получены в работах [17] (космологическая эволюция вырожденного Ферми-газа), [18] (космологическая эволюция однокомпонентного Больцмановского газа), [19] (комплексное исследование).

2. Математическая модель статистических систем с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием

2.1. Микроскопическая динамика скалярно заряженных частиц

Канонические уравнения движения релятивистской частицы в фазовом пространстве Γ имеют вид (см., например, [9]):

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \quad \frac{dP_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad (1)$$

где $H(x, P)$ - релятивистски инвариантная функция Гамильтона. $u^i = dx^i/ds$ - вектор скорости частиц. Вычисляя полную производную от функции динамических переменных $\Psi(x^i, P_k)$, с учетом (1) найдем:

$$\frac{d\Psi}{ds} = [H, \Psi], \quad (2)$$

где введены инвариантные скобки Пуассона:

$$[H, \Psi] = \frac{\partial H}{\partial P_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}. \quad (3)$$

Отметим, что скобка Пуассона (3) может быть переписана в явно ковариантной форме с помощью оператора ковариантного дифференцирования по Картану, $\tilde{\nabla}_i$:

$$\tilde{\nabla}_i = \nabla_i + \Gamma_{ij}^k P_k \frac{\partial}{\partial P_j}, \quad (4)$$

где ∇_i - оператор ковариантного дифференцирования по Риччи, а Γ_{ij}^k - символы Кристоффеля второго рода относительно метрики g_{ij} базы X . Оператор $\tilde{\nabla}$ определяется таким образом, что

$$\tilde{\nabla}_i P_k \equiv 0 \quad (5)$$

и выполняется следующее *символическое* правило дифференцирования функций:

$$\tilde{\nabla}_i \Psi(x, P) = \nabla_i [\Psi(x), P]. \quad (6)$$

Это правило означает, что для вычисления производной по Картану от функции $\Psi(x, P)$ достаточно вычислить обычную ковариантную производную функции при ковариантном постоянстве вектора импульса. Вследствие этого равенства введенный оператор удобен для выполнения дифференциальных и интегральных операций в фазовом пространстве Γ . Перепишем скобки Пуассона (3) в явно ковариантной форме:

$$[H, \Psi] \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i H, \quad (7)$$

Функция Гамильтона и соотношение нормировки для обобщенного импульса принимают вид¹:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [m_*^{-1}(x)(P, P) - m_*] = 0, \quad (8)$$

$$H(x, P) = 0 \Rightarrow (P, P) = m_*^2, \quad (9)$$

где $m_* = m_*(\Phi)$ - *эффективная масса частиц*.

Инвариантный функционал действия классической частицы в скалярных полях $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ имеет вид

$$S = \int m_* ds, \quad (10)$$

где $m_*(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ - *инвариантная эффективная масса частицы* в скалярных полях. Вследствие аддитивности функции Лагранжа эффективная масса частицы должна иметь вид:

$$m_* = m_0 + \sum_r q^{(r)} \Phi_r, \quad (11)$$

где m_0 - некоторая начальная масса покоя и $q^{(r)}$ - заряд частицы относительно скалярного поля Φ_r , которые мы предполагаем функционально независимыми. В частности, для скалярного синглета $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \equiv \Phi$

$$m_* = m_0 + q\Phi. \quad (12)$$

2.2. Макроскопические средние и уравнения переноса динамических средних

Пусть $f_a(x, p)$ есть инвариантная функция распределения a -го сорта частиц в семи-мерном фазовом пространстве $\Gamma = X \times P$, причем

$$dP = \sqrt{-g} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_4} \quad (13)$$

¹ Здесь и в дальнейшем принята универсальная система единиц $\hbar = c = G = 1$.

есть инвариантный элемент объема 3-х мерного пространства импульсов, где p_4 есть положительный корень уравнения (9). С помощью инвариантной функции распределения определяются макроскопические средние некоторой динамической скалярной функции $\psi(x, p)$:

$$\Psi(\tau) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_V U_i dV \int_{P(X)} p^i dP \psi(x, p) f(x, p), \quad (14)$$

где U^i есть вектор скорости макроскопического поля наблюдателей, а τ есть время, измеряемое по часам этих наблюдателей. Внутренний интеграл по импульсному пространству в (14) представляет собой вектор потока динамической величины ψ . В частности, при $\psi = 1$ мы получим из (14) вектор плотности потока частиц:

$$n^i(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P(X)} p^i f(x, p) dP, \quad (15)$$

так что:

$$N(\tau) = \int_V n^i U_i dV \quad (16)$$

есть полное число частиц в объеме V в момент времени τ .

Пусть в статистической системе протекают реакции:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A a_A \rightleftharpoons \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B, \quad (17)$$

где a_A - символы частиц, а ν_A - их числа в каждом канале реакции. Таким образом, обобщенные импульсы начального (I) и конечного (F) состояний равны:

$$p_I = \sum_{A=1}^m \sum_{\alpha}^{\nu_A} p_A^{\alpha}, \quad p_F = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\alpha'}^{\nu'_B} p_B^{\alpha'} \rightarrow p_I = p_F. \quad (18)$$

Далее, строгими следствиями общерелятивистских кинетических уравнений являются уравнения переноса динамических величин:

$$\begin{aligned} & \nabla_i \sum_a \int_{P_0} \psi_a f_a p^i dP_a - \sum_a \int_{P_0} f_a m_* [H_a, \psi_a] dP_a = \\ & - \sum_{by\ channels} \int \left(\sum_{A=1}^m \nu_A \psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \psi'_B \right) \times \delta^4(p_F - p_I) (Z_{IF} W_{IF} - Z_{FI} W_{FI}) \prod_{I,F} dP, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$W_{FI} = (2\pi)^4 |M_{IF}|^2 2^{-\sum \nu_A + \sum \nu'_B}$$

- матрица рассеяния канала реакций (17), ($|M_{IF}|$ - инвариантные амплитуды рассеяния);

$$\begin{aligned} Z_{IF} &= \prod_I f(p_A^{\alpha}) \prod_F [1 \pm f(p_B^{\alpha'})]; \\ Z_{FI} &= \prod_I [1 \pm f(p_A^{\alpha})] \prod_F f(p_B^{\alpha'}), \end{aligned}$$

знак “+” соответствует бозонам, “-” - фермионам (подробности см. в [10, 11]).

Полагая в (19) $\Psi_a = g_a$, где g_a - некоторые фундаментальные заряды, сохраняющиеся в реакциях (17), получим уравнения переноса плотностей потоков числа частиц статистической системы:

$$\nabla_i J_G^i = 0, \quad (20)$$

где:

$$J_G^i = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} g_a \int_P f_a(x, p) p^i dP. \quad (21)$$

- вектор плотности фундаментального тока, соответствующего зарядам g_a . В частности, закон сохранения (20) всегда имеет место для каждого сорта частиц b ($g_a = \delta_a^b$) при условии упругости их столкновений.

Положим в (19) $\Psi_a = P^k$. Тогда в результате закона сохранения импульса при столкновениях (17), подынтегральное выражение в больших скобках (19) становится равным:

$$\sum_{A=1}^m v_A \Psi_A - \sum_{B=1}^{m'} v'_B \Psi'_B \equiv P_I - P_F = 0.$$

Тогда, получим уравнения переноса энергии-импульса статистической системы:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sum_r \sigma^{(r)} \nabla^i \Phi_r = 0, \quad (22)$$

где введен *тензор энергии-импульса статистической системы*

$$T_p^{ik} = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_P f_a(x, p) p^i p^k dP \quad (23)$$

и *скалярная плотность заряда статистической системы относительно скалярного поля Φ_r , $\sigma^{(r)}$* :

$$\sigma^{(r)} = \sum_a \sigma_a^{(r)}, \quad (24)$$

где $\sigma_a^{(r)}$ *скалярная плотность заряда a - компоненты статистической системы относительно скалярного поля Φ_r* :

$$\sigma_a^{(r)} = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} m_a^* q_a^{(r)} \int_P f_a(x, p) dP. \quad (25)$$

В частности, для синглета (q, Φ) закон сохранения (22) принимает вид:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi = 0, \quad (26)$$

где (см. [10]):

$$\sigma = \Phi \frac{2S+1}{(2\pi)^3} q^2 \int_P f(x, p) dP. \quad (27)$$

Следует отметить, что форма (ТЭИ) (23), а также скалярной плотности заряда (25), найденная для скалярно заряженных частиц при заданной функции Гамильтона является однозначным следствием канонических уравнений и предположения о сохранении полного импульса в локальных столкновениях частиц.

2.3. Фантомные скалярные поля с притяжением

Функция Лагранжа массивного фантомного скалярного поля с притяжением одноименно заряженных частиц имеет вид [13]:

$$L_s = -\frac{1}{8\pi}(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} + m_s^2\Phi^2), \quad (28)$$

а соответствующий тензор энергии-импульса равен:

$$T_s^{ik} = \frac{1}{8\pi}(-2\Phi^{,i}\Phi^{,k} + g^{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + g^{ik}m_s^2\Phi^2). \quad (29)$$

В этой статье мы будем рассматривать скалярный синглет. В этом случае закон сохранения суммарного тензора энергии-импульса системы “скалярно заряженные частицы + скалярное поле” $T^{ik} = T_p^{ik} + T_s^{ik}$ имеет вид:

$$\nabla_k T^{ik} = -\frac{1}{4\pi}(\square\Phi - m_s^2\Phi - 4\pi\sigma)\nabla^i\Phi = 0, \quad (30)$$

откуда мы получаем уравнение для скалярного поля с источником (31):

$$\square\Phi - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma. \quad (31)$$

2.4. Локально равновесные статистические системы скалярно взаимодействующих частиц

В случае локального термодинамического равновесия (ЛТР), который только и будет рассматриваться в данной статье², функция распределения частиц имеет локально - равновесный вид:

$$f_{(a)}^0(x, p_a) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_a + (v, P_a)}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1}, \quad (32)$$

где знаки $-$ и $+$ соответствуют частицам с целым и полуцелым спином, v^i - временноподобный вектор макроскопической скорости статистической системы, так что:

$$(v, v) = 1, \quad (33)$$

θ - локальная температура статистической системы. Далее, μ_a - химический потенциал a -го сорта частиц, при этом химические потенциалы должны удовлетворять условиям химического равновесия:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A \mu_A = \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \mu'_B. \quad (34)$$

2.5. Моменты равновесного распределения

Моменты распределения (32) равны:

$$n_{(a)}^i(x) = n_{(a)}(x) v^i; \quad (35)$$

$$T_p^{ik}(x) = (\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^i v^k - \mathcal{P}_p g^{ik}, \quad (36)$$

² Бесстолкновительная кинетическая модель рассматривалась в работах [14], [15].

где $n_{(a)}$ есть плотность числа частиц сорта “ a ”, $\mathcal{E}_p = \sum \mathcal{E}_{(a)}$ и $\mathcal{P}_p = \sum \mathcal{P}_{(a)}$ есть суммарные плотность энергии и давление статистической системы:

$$n_{(a)} = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch} x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (37)$$

$$\mathcal{E}_p = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (38)$$

$$\mathcal{P}_p = \sum_a \frac{2S+1}{6\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^4 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (39)$$

$$T_p = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^2 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (40)$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q(m + q_{(a)} \Phi)^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}, \quad (41)$$

где введены две безразмерные скалярные функции:

$$\lambda_* = \frac{m_*}{\theta}; \quad \gamma_{(a)} = \frac{\mu_{(a)}}{\theta}, \quad (42)$$

а макроскопические скаляры \mathcal{E}_p , \mathcal{P}_p , T_p и σ получаются суммированием соответствующих величин по компонентам системы.

Заметим, что химический потенциал безмассовых частиц, обладающих нулевыми фундаментальными зарядами, в состоянии ЛТР равен нулю. Этот вывод следует из того, что числа ν_A^a таких частиц, участвующих в реакциях (17), могут быть совершенно произвольными. Тогда из факта существования реакции аннигиляции частиц и античастиц следует известное соотношение:

$$\underline{\mu}_{(a)} = -\mu_{(a)}. \quad (43)$$

Заметим также, что релятивистский химический потенциал связан с импульсом Ферми p_f стандартным релятивистским соотношением:

$$\mu = \sqrt{m_*^2 + p_f^2}. \quad (44)$$

3. Математическая модель локально равновесной самогравитирующей статистической системы скалярно заряженных частиц

3.1. Полная система уравнений

Полная система самосогласованных макроскопических уравнений, описывающих самогравитирующую статистическую систему скалярно заряженных частиц, состоит:

- Во-первых, из уравнений Эйнштейна:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = 8\pi (T_p^{ik} + T_s^{ik}), \quad (45)$$

где T_p^{ik} - определенный выше тензор энергии - импульса статистической системы (36), (38), (39), а T_s^{ik} тензор энергии - импульса скалярного поля (29).

- Во-вторых, из уравнений переноса тензора энергии - импульса частиц (26).
- В-третьих, из уравнения скалярного поля с источником (31).
- В-четвертых, из закона сохранения частиц (20):

$$\nabla_i \sum_{(a)} e_{(a)} n_{(a)}^i = 0. \quad (46)$$

Выясним, к чему приводят законы сохранения (26) и (46) в условиях LTE (см. [19]). С помощью (35) приведем закон сохранения числа частиц (46) к виду:

$$\nabla_k (\Delta n v^k) = 0, \quad \Delta n \equiv \sum_{(a)} e_{(a)} n_{(a)}. \quad (47)$$

Из соотношения нормировки вектора скорости (33) вытекает известное тождество:

$$v^k_{,i} v_k \equiv 0. \quad (48)$$

Далее, с учетом определения (36) законы сохранения тензора энергии - импульса статистической системы (26) можно привести к виду:

$$(\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^i_{,k} v^k = (g^{ik} - v^i v^k) (\mathcal{P}_{p,k} + \sigma \Phi_{,k}); \quad (49)$$

$$\nabla_k (\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^k = (\mathcal{P}_{p,k} + \sigma \Phi_{,k}) v^k. \quad (50)$$

Таким образом, формально на 3 макроскопические скалярные функции $\mathcal{E}_p, \mathcal{P}_p, n_e$ и 3 независимые компоненты вектора скорости v^i макроскопические законы сохранения дают 5 независимых уравнений (47) - (50), так как одно из уравнений (49) является зависимым от остальных вследствие тождества (48). Однако, не все указанные макроскопические скаляры функционально независимы, поскольку все они определяются локально равновесными функциями распределения (32). При разрешенной серии условий химического равновесия, когда независимым остается лишь один химический потенциал, разрешенном уравнении массовой поверхности и заданных скалярном потенциале и масштабном факторе четыре макроскопические скаляра, $\mathcal{E}_p, \mathcal{P}_p, n_e, \sigma$, определяются двумя термодинамическими скалярами — некоторым химическим потенциалом μ и локальной температурой θ . Таким образом, система уравнений (47) - (50) оказывается полностью определенной.

3.2. Космологическая модель

Рассмотрим сформулированную выше самосогласованную математическую модель применительно к космологической ситуации для пространственно - плоской модели Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

В этом случае все термодинамические функции зависят только от времени. Нетрудно убедиться, что законы сохранения сводятся к двум дифференциальным уравнениям относительно двух термодинамических функций μ и θ :

$$\dot{\mathcal{E}}_p + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) = \sigma \dot{\Phi}; \quad (51)$$

$$\dot{\Delta}n + 3\frac{\dot{a}}{a}\Delta n = 0 \Rightarrow \Delta n a^3 = \text{Const.} \quad (52)$$

При $\Phi = \Phi(t)$ тензор энергии - импульса скалярного поля также принимает вид тензора энергии - импульса изотропной однородной жидкости:

$$T_s^{ik} = (\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s)v^i v^k - \mathcal{P}_s g^{ik}, \quad (53)$$

где

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(-\dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2); \quad (54)$$

$$\mathcal{P}_s = -\frac{1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2), \quad (55)$$

так что:

$$\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s = -\frac{\dot{\Phi}^2}{4\pi}. \quad (56)$$

Уравнение скалярного поля в метрике Фридмана принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_s^2 \Phi = 4\pi\sigma. \quad (57)$$

К этим уравнениям необходимо добавить нетривиальное уравнение Эйнштейна:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\mathcal{E}, \quad (58)$$

где \mathcal{E} - суммарная плотность энергии фермионов и скалярного поля. Эта система уравнений (51), (52), (57) и (58) относительно переменных $\theta(t)$, $\mu(t)$, $\Phi(t)$, $a(t)$ описывает замкнутую математическую модель космологической эволюции статистической системы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием (см. [13]). В этих уравнениях одно, (52), является алгебраическим, два, (51) и (58), являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка и одно уравнение, (57), является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Таким образом, при приведении этой системы к нормальному виду мы получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с алгебраической связью относительно пяти функций:

$$\mu(t); \theta(t); \Phi(t); Z(t) = \dot{\Phi}; a(t). \quad (59)$$

В условиях полного вырождения макроскопические скаляры однокомпонентной теперь статистической системы равны:

$$n = \frac{p_f^3}{3\pi^2} \equiv \frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2}; \quad (60)$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{m_*^4}{8\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (61)$$

$$\mathcal{P}_p = \frac{m_*^4}{24\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (62)$$

$$\sigma = q \frac{m_*^3}{2\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})], \quad (63)$$

причем:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{p_f}{m_*} \quad m_* = |m_0 + q\Phi|; \\ p_f &= \frac{p_0}{a}, \quad p_0 = p_f|_{a=1}.\end{aligned}\quad (64)$$

Таким образом, в условиях полного вырождения все макроскопические скаляры явно определяются элементарными скалярными функциями $\Phi(t)$ и $a(t)$.

В свою очередь, скалярные функции $\Phi(t)$ и $a(t)$ определяются системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений, (57) и (58):

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma; \quad (65)$$

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s), \quad (66)$$

где \mathcal{E}_p - плотность энергии Ферми - системы (61), а \mathcal{E}_s - плотность энергии фантомного скалярного поля (54):

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(-\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2). \quad (67)$$

Вводя переменные:

$$Z(t) = \dot{\Phi}; \quad \Lambda(t) = \ln a \Leftrightarrow a = e^\Lambda, \quad (68)$$

приведем уравнения (65) и (67) к виду:

$$\dot{Z} = -3\dot{\Lambda}Z + m^2\Phi + 4\pi\sigma(\Lambda, \Phi); \quad (69)$$

$$\dot{\Lambda} = 8\pi\mathcal{E}_p(\Lambda, \Phi) - Z^2 + m_s^2\Phi^2. \quad (70)$$

Для того, чтобы получить из этой системы нормальную систему дифференциальных уравнений, удобную для численного моделирования, необходимо подставить в левую часть уравнения (69) выражение для $\dot{\Lambda}$ из уравнения (70).

3.3. Анализ математической модели

Как указано выше, мы рассматриваем космологические модели с ультрарелятивистским стартом, в котором инфляционный режим расширения может реализовываться на более поздних стадиях. В самом крайнем, ультрарелятивистском пределе $\psi \rightarrow \infty$ для макроскопических скаляров принимают вид:

$$\mathcal{E}_p = \frac{p_F^4}{4\pi^2}; \quad \mathcal{P}_p = \frac{p_F^4}{12\pi^2}; \quad \sigma = 0. \quad (71)$$

Далее, ранним стадиям соответствует условие:

$$m_s t \ll 1. \quad (72)$$

В этом случае уравнение поля принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} = 0. \quad (73)$$

Фантомное поля вблизи сингулярности:

$$\Phi = \Phi_0 = \text{Const}, \quad (m_s t \ll 1). \quad (74)$$

В этом случае уравнение Эйнштейна принимает вид:

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = m_s^2 \Phi_0^2 + \frac{2p_0^4}{a^4} \quad (75)$$

и имеет своим решением

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{2} p_0^2}{m_s \Phi_0}} \sqrt{\sinh\left(\frac{2m_s \Phi_0}{\sqrt{3}} t\right)}. \quad (76)$$

Решение (76) принадлежит к классу решений, полученных в [20] и описывающих плавный переход с ультрарелятивистской стадии $a \sim t^{1/2}$ на стадию инфляции $a \sim e^{\nu_0 t}$. Как видно из решения (75), переход на инфляционную стадию происходит во времена порядка:

$$t \gtrsim t_{inf} = \frac{\sqrt{3}}{4m_s \Phi_0}. \quad (77)$$

С другой стороны, условием корректности рассматриваемого приближения является (72). Отсюда можно сделать следующий вывод: при $t_{inf} m_s < 1$ инфляция может развиваться на рассматриваемом промежутке времени, в противном случае вся ранняя эпоха вселенной является ультрарелятивистской. Итак, условием возникновения ранней инфляции (во времена, меньшие m_s^{-1}) в случае системы с фантомным полем является малость начального скалярного потенциала³:

$$\Phi_0 \ll \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (78)$$

Очевидно, что к случаю малого времени $m_s t \ll 1$ целиком относится и случай безмассового фантомного поля. Замечательным является тот факт, что масса скалярного поля m_s выпадает из условия (78). В частности, для безмассового скалярного поля, полагая в (76) $m_s \rightarrow 0$ получим:

$$a(t) = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/4} \sqrt{t} \quad (79)$$

ультрарелятивистскую асимптотику ($\Omega = -1$). Как видно из предыдущего анализа, ультрарелятивистская асимптотика будет справедлива для безмассового фантомного поля до тех пор, пока фермионы остаются ультрарелятивистскими.

Пусть теперь $m_s \neq 0$. Рассмотрим поведение космологической модели при больших временах

$$m_s t \gg 1, \quad (80)$$

предполагая, что на этих временах Ферми - система уже станет нерелятивистской. Поскольку, однако, на таких временах масштабный фактор станет большой величиной, то плотность скалярного заряда σ снова станет малой величиной, и ее можно

³ как это ни представляется, на первый взгляд, парадоксальным

отбросить. Но в уравнении поля (65) при этом нельзя отбросить первые и вторые производные по сравнению с массивным членом, так как мы получили бы $m^2\Phi = 0$.

$$\ddot{\Phi} + 3\dot{\Lambda}\dot{\Phi} - m_s^2\Phi = 0. \quad (81)$$

В уравнении Эйнштейна (66) по этой же причине можно отбросить вклад частиц в плотность энергии:

$$3\dot{\Lambda}^2 = -\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2. \quad (82)$$

Эта система имеет следующее асимптотическое при $m_s t \rightarrow \infty$ решение:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(t) &= \frac{m_s t}{\sqrt{3}} + \Phi_0, \quad (m_s \neq 0); \\ \Lambda^{(0)}(t) &= \frac{m_s^2 t^2}{6} + \Phi_0 \frac{m_s t}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (83)$$

где $\Phi_0 = \text{Const}$ - произвольная константа. Отметим, что решение (83) обращает в тождество уравнение поля (81), а при подстановке в уравнение Эйнштейна (82) приводит к относительной погрешности порядка $(m_s t)^{-2}$.

Вычислим инвариантное космологическое ускорение относительно найденного решения:

$$\Omega = \frac{\ddot{a}^{(0)} a^{(0)}}{\dot{a}^{(0)2}} = 1 + \frac{\ddot{\Lambda}^{(0)}}{\dot{\Lambda}^{(0)2}} = 1 + \frac{1}{(\Phi^{(0)}(t))^2}. \quad (84)$$

Таким образом, при больших временах ($m_s t \rightarrow \infty$) система выходит на режим инфляционного расширения ($\Omega \rightarrow 1$). Отметим, что можно доказать устойчивость полученного асимптотического решения при больших временах.

Нетрудно видеть, что эффективная масса фермионов при этом растет линейно со временем:

$$m_* \equiv |m + q\Phi| \approx q \frac{m_s t}{\sqrt{3}}, \quad (85)$$

так что фермионы быстро становятся нерелятивистскими ($\Psi \rightarrow 0$). В связи с этим сделаем следующие важные замечания:

1. Холодная полностью вырожденная Ферми - система с очень большими эффективными массами скалярно заряженных фермионов может стать хорошей моделью темной материи.
2. На определенном этапе космологической эволюции гравитационные неустойчивости в нерелятивистской материи могут привести к возникновению обособленных областей с темной материей.
3. Стандартные Куперовские механизмы в Ферми - системах с притяжением частиц могут привести к образованию бозонов из пар фермионов и, тем самым, к сверхтекучести областей темной материи.
4. При росте эффективных масс фермионов выше планковского значения, т.е., согласно (85) при

$$m_* \gg m_{\text{Pl}} \Leftrightarrow q \frac{m_s t}{\sqrt{3}} \gg 1, \quad (86)$$

массивные фермионы могут, в принципе, могут образовать устойчивые первичные черные дыры, скорее всего, с учетом теорем Хоукинга о черных дырах, в варианте со сверхтекучими квази-бозонами с нулевым спином.

4. Численное моделирование космологической эволюции

Итак, перейдем теперь к результатам численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (65), (66) с начальными условиями и определениями плотностей энергии и скалярного заряда (61), (63) и (67). На представленных ниже графиках эта перекалибровка произведена, так что всюду время отсчитывается от момента космологической сингулярности в Планковской шкале времени. Все представленные на графиках величины также измеряются в Планковских единицах. Далее, *коэффициентом баратропы*, κ , мы будем называть отношение полного давления системы к ее полной плотности энергии:

$$\kappa = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{P}_p + \mathcal{P}_s}{\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s}. \quad (87)$$

Как известно (см., например, [19]), величина инвариантного космологического ускорения Ω связана с коэффициентом баратропы κ соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa), \quad (88)$$

так что ультрарелятивистскому уравнению состояния $\kappa = 1/3$ соответствует значение $\Omega = -1$; нерелятивистскому уравнению состояния $\kappa = 0$ соответствует $\Omega = -1/2$; значению $\kappa = -1/3$ соответствует $\Omega = 0$; инфляционному (вакуумному) уравнению состояния $\kappa = -1$ соответствует $\Omega = +1$, значениям $\kappa < -1$ соответствует гиперинфляция $\Omega > 1$.

Введем следующие характерные моменты времени, важные для понимания механизма космологической эволюции системы фермионов с фантомным скалярным полем:

1. Комптоновский момент времени по отношению к массе квантов скалярного поля:

$$t_s = \frac{1}{m_s}, \quad m_s \neq 0. \quad (89)$$

2. Для безмассового скалярного поля с источником можно определить аналогичный момент времени по отношению к эффективной массе скалярного поля. В работах [14], [15] (а также в [16]) аналитическими методами показано, что плотность скалярного заряда σ при определенных условиях может играть роль массивного члена в уравнении скалярного поля. При этом можно ввести эффективную массу скалярного поля даже в случае $m_s = 0$:

$$m_s^* = \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\Phi}}. \quad (90)$$

Поэтому, даже при нулевой массе квантов скалярного поля при наличии функции источника σ скалярное поле ведет себя во многих случаях как массивное

скалярное поле с той лишь разницей, что эффективная масса (90) зависит от космологического времени $m_s^*(t)$. Соответственно эффективной массе введем комптоновский момент времени:

$$t_s^* = \frac{1}{m_s^*}, \quad m_s = 0. \quad (91)$$

3. Момент времени t_η , когда становятся равными плотности энергии фермионов и скалярного поля:

$$\mathcal{E}_s(t_\eta) = \mathcal{E}_p(t_\eta) \Leftrightarrow \eta_s(t_\eta) = 1. \quad (92)$$

Заметим, что таких момента времени может быть два.

4. Момент времени t_r перехода фермионов от ультрарелятивистского состояния к нерелятивистскому:

$$\psi(t_r) = 1. \quad (93)$$

4.1. *Случай массивного фантомного скалярного поля с минимальным взаимодействием ($\sigma = 0$)*

Численное интегрирование выявило три характерные стадии космологической эволюции в этом случае:⁴

1. $t \lesssim t_s$: доминирование фермионов;
2. $t_s \lesssim t \lesssim t_\eta$: конкуренция фермионов и скалярного поля;
3. $t_\eta \lesssim t < +\infty$: доминирование скалярного поля.

Ниже приведены графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 100$, $m_0 = 0.001$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$. Всюду на графиках Рис. 1 - Рис. 4: жирная линия - $m_s = 10^{-2}$, тонкая линия - $m_s = 10^{-4}$, средне - пунктирная линия - $m_s = 10^{-6}$, мелко - пунктирная линия - $m_s = 10^{-8}$. Также всюду на этих графиках, как и на всех остальных, по оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма времени от момента космологической сингулярности в Планковской шкале, $\log_{10} t$.

4.2. *Случай безмассового ($m_s = 0$) фантомного скалярного поля с источником*

В этом случае система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\dot{\Lambda}\dot{\Phi} - 4\pi\sigma = 0; \quad (94)$$

$$\dot{\Lambda}^2 = \frac{8\pi}{3}(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s), \quad (95)$$

где плотность энергии скалярного поля равна

$$\mathcal{E}_s = -\frac{\dot{\Phi}^2}{8\pi} \quad (96)$$

⁴ Основные закономерности эволюции на ранних и поздних стадиях подтверждают приведенные выше результаты аналитического исследования.

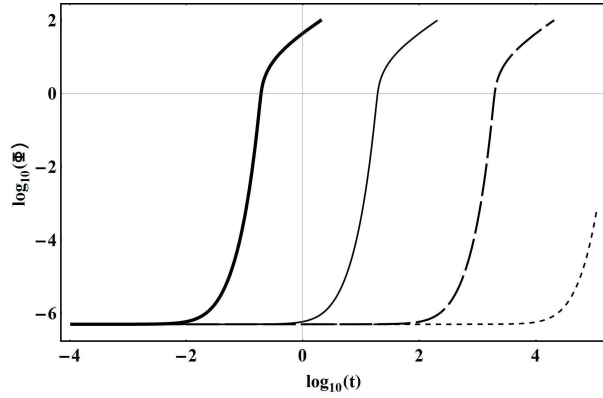


Рис. 1. Эволюция потенциала Φ . По оси ординат отложены значения десятичного логарифма скалярного потенциала, $\log_{10} \Phi$.

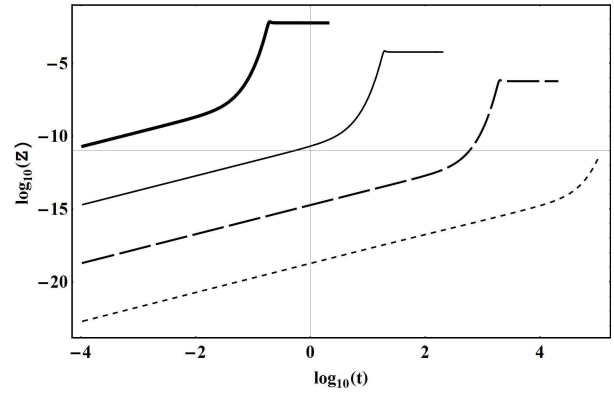


Рис. 2. Эволюция производной потенциала $Z = \dot{\Phi}$. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма скалярного потенциала, $\log_{10} \Phi$.

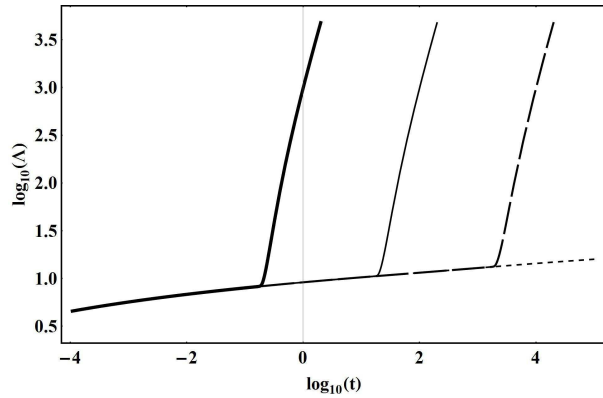


Рис. 3. Эволюция логарифма масштабной функции $\Lambda(t) = \exp a(t)$. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма, $\log_{10} \Lambda$, т.е., $\log_{10}(\ln a(t))$.

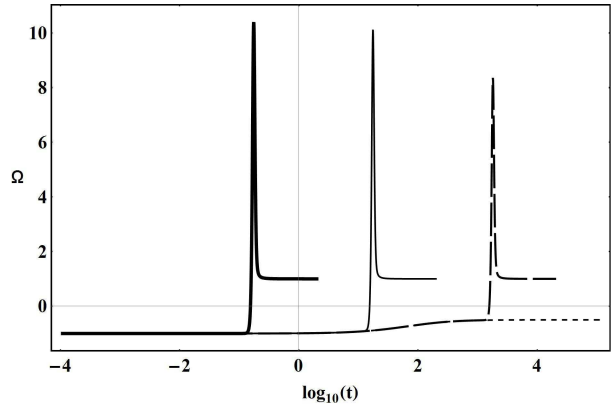


Рис. 4. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

и может быть только отрицательной, причем в начальный момент времени $t = 0$ она равна нулю. В результате, космологический сценарий для массивного скалярного поля раздела 4.1 изменился, в нем по-прежнему присутствуют три стадии, но на последней стадии доминируют фермионы:

1. $t \lesssim t_s^*$: доминирование ультрарелятивистских фермионов;
2. $t_s^* < t \lesssim t_r$: доминирование скалярного поля;
3. $t_r < t < +\infty$: доминирование нерелятивистских фермионов.

На приведенных ниже графиках (Рис. 5 - Рис. 8) представлены результаты численного моделирования космологической эволюции системы вырожденных фермионов с безмассовым фантомным скалярным полем. Ввиду на указанных графиках приняты следующие значения параметров:

$\rho_0 = 0.01$, $m_0 = 0$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$. Жирная линия - $q = 0.01$, тонкая линия - $q = 0.1$, средне - пунктирная линия - $q = 1$, мелко - пунктирная линия - $q = 5$.

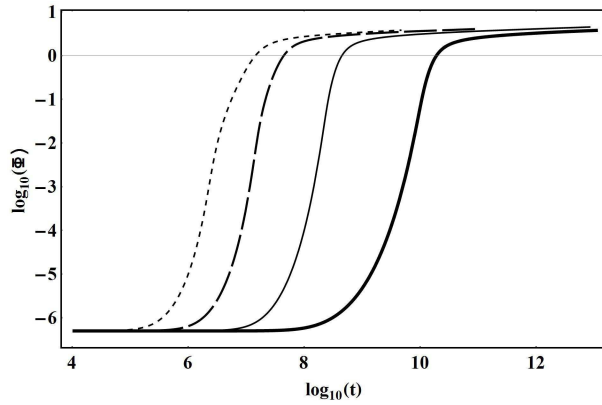


Рис. 5. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

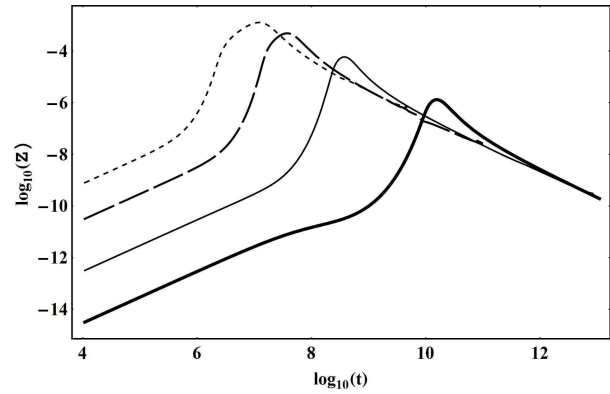


Рис. 6. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$

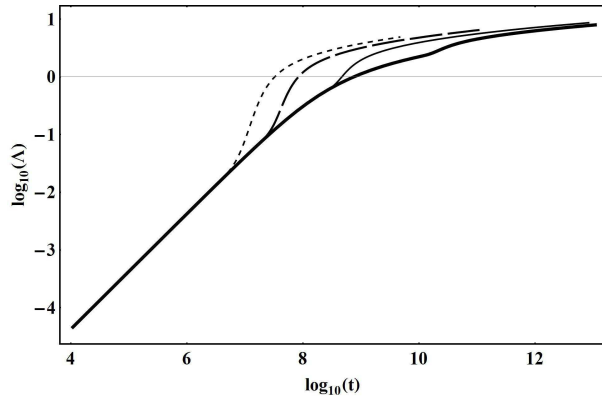


Рис. 7. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

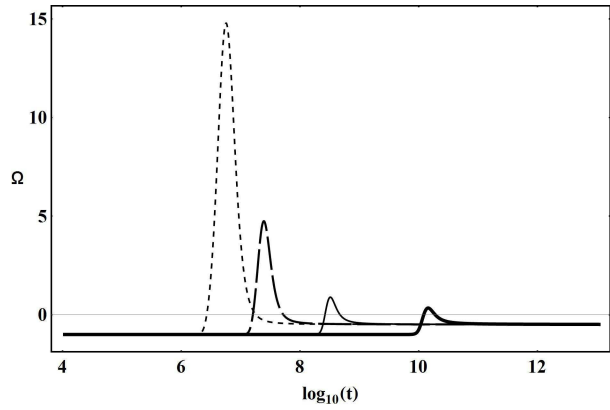


Рис. 8. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

4.3. Случай перехода от релятивистской стадии к инфляции через нерелятивистское плато для массивного фантомного скалярного поля ($m_s \neq 0$) с источником ($\sigma \neq 0$)

При малых значениях m_s переход к инфляционной стадии отодвигается на поздние времена и ферми - система успевает к этому моменту стать нерелятивистской. На графике коэффициента баротропии появляется характерное нерелятивистское плато ($\kappa = 0$) перед фантомным всплеском. При увеличении m_s всплеск сдвигается к малым временам, обрезая плато вплоть до его полного исчезновения. В этом случае происходит переход от релятивистской стадии к инфляции через фантомный всплеск.

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 1$, $m_0 = 0.1$, $q = 0.001$, $\Phi(0) = 0.05$. Жирная линия - $m_s = 10^{-8}$, тонкая линия - $m_s = 10^{-6}$, средне - пунктирная линия - $m_s = 10^{-3}$, мелко - пунктирная линия - $m_s = 10^{-1}$.

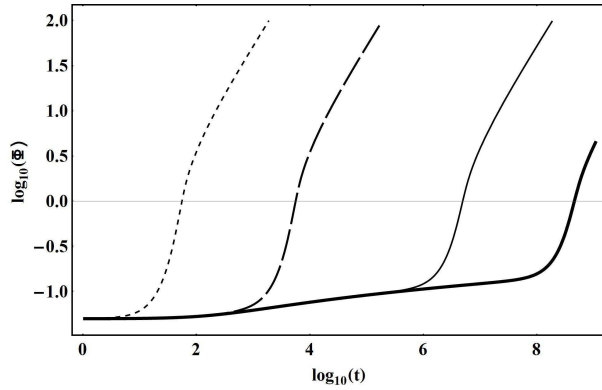


Рис. 9. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

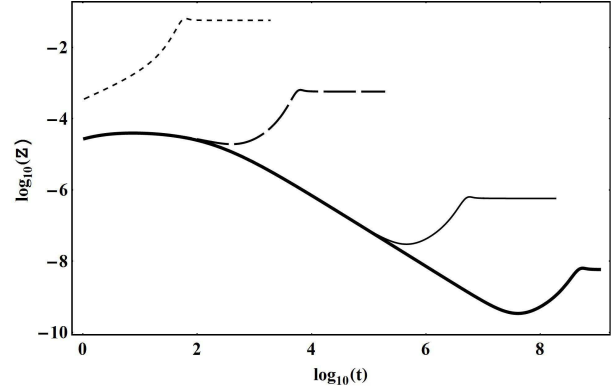


Рис. 10. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

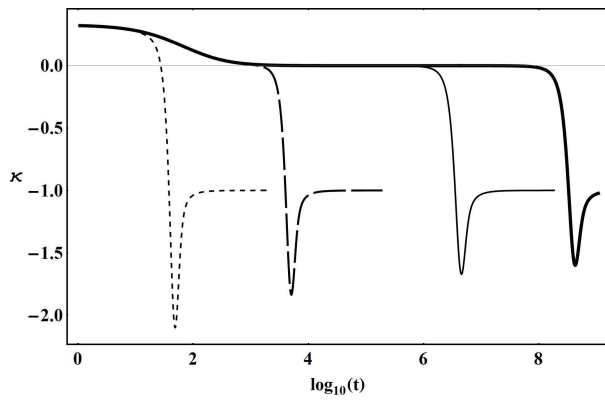


Рис. 11. Эволюция коэффициента баротропии κ .

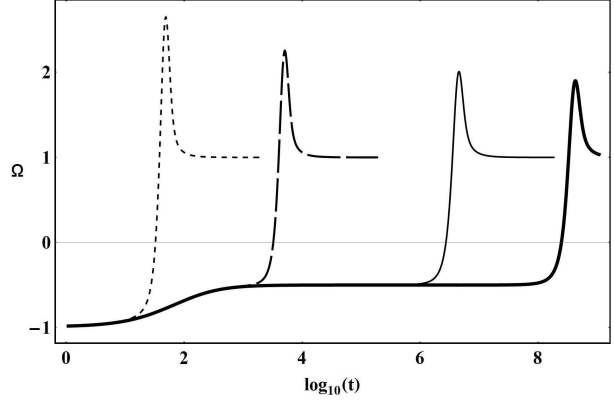


Рис. 12. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

4.4. Случай двух стадий ускорения с промежуточной нерелятивистской стадией для массивного фантомного скалярного поля с источником

При определенных значениях параметров системы можно наблюдать две стадии ускорения: первая - временное доминирование скалярного поля за счет достаточно больших значений эффективной массы скалярного поля m_s^* на соответствующих временах ($m_s^* t > 1$) и вторая - устойчивое доминирование скалярного поля на временах $m_s t > 1$. Между инфляционными стадиями может возникать нерелятивистское плато ($\kappa = 0$, $\Omega = -1/2$).

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 1$, $m = 0$, $m_s = 10^{-8}$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-8}$. Жирная линия - $q = 1$, тонкая линия - $q = 0.1$, средне - пунктирная линия - $q = 0.01$, мелко - пунктирная линия - $q = 0.001$.

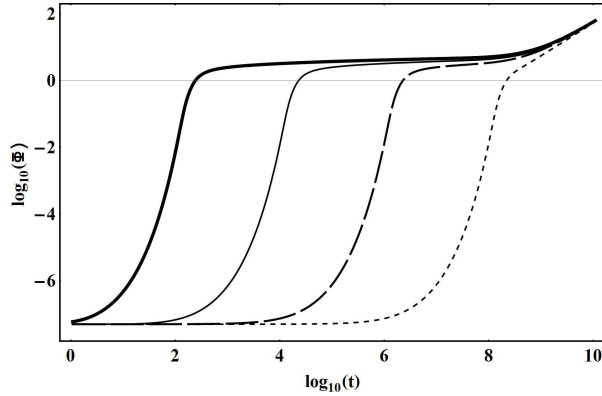


Рис. 13. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

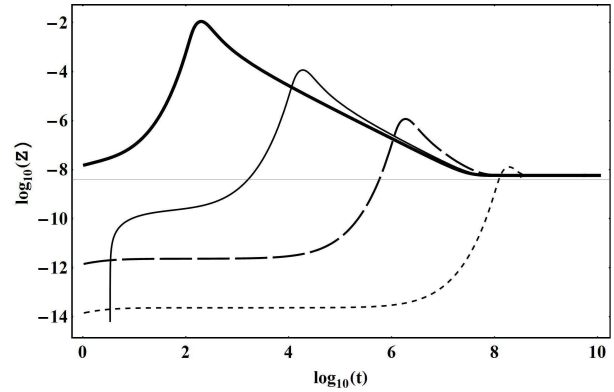


Рис. 14. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

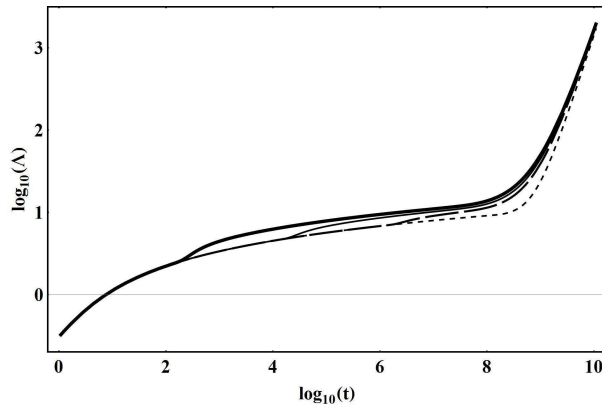


Рис. 15. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

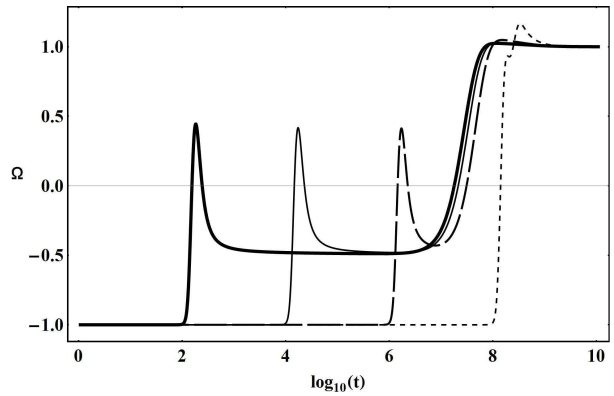


Рис. 16. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

5. Обсуждение результатов

Таким образом, проведенные исследования выявили следующие закономерности космологической эволюции статистических систем фермионов с фантомным скалярным взаимодействием.

1. В процессе космологической эволюции в таких системах обязательно возникают всплески ускорения Ω , которые можно охарактеризовать тремя параметрами: моментом времени максимума всплеска t_m , полушириной всплеска Δt и высотой h всплеска в максимуме.
2. Статистические системы фермионов с фантомным скалярным взаимодействием обнаруживают тенденцию к образованию устойчивых режимов с постоянным ускорением (этапов космологической эволюции) $\Omega = -1$ ($\kappa = 1/3$, ультрарелятивистское состояние), $\Omega = -1/2$ ($\kappa = 0$, нерелятивистское состояние) и $\Omega = 1$ ($\kappa = -1$, инфляционное, вакуумное состояние).
3. Динамические особенности статистических систем с фантомным скалярным взаимодействием слабо зависят от типа статистики систем частиц [19].
4. Четко выявляются 4 различных типа принципиально различных космологиче-

ских сценариев для статистических систем частиц с фантомным скалярным взаимодействием в зависимости от параметров системы (фундаментальных констант и начальных условий):

- 1-й тип. Ультррелятивистский старт \rightarrow всплеск ускорения \rightarrow инфляционная стадия (Рис. 17). Этот сценарий осуществляется для случая минимального взаимодействия ($\sigma = 0 \rightarrow q = 0$) массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).
- 2-й тип. Ультррелятивистский старт \rightarrow всплеск ускорения \rightarrow нерелятивистская стадия (Рис. 18). Этот сценарий осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и безмассового скалярного поля ($m_s = 0$).
- 3-й тип. Ультррелятивистский старт \rightarrow плавный переход на нерелятивистскую стадию \rightarrow небольшой всплеск ускорения \rightarrow инфляционная стадия (Рис. 19). Этот сценарий осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).
- 4-й тип. Ультррелятивистский старт \rightarrow небольшой всплеск ускорения \rightarrow нерелятивистская стадия \rightarrow переход на инфляционную стадию (Рис. 20). Этот сценарий также осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).

5. Самые большие и вместе с тем поздние всплески космологического ускорения (порядка $\Omega \sim 10^2$ и даже больше)⁵ во времена $t_m \sim 10^5 \div 10^9$ присущи космологическому сценарию 1-го типа.

Отметим, что, фактически, все рассмотренные выше явления имеют место быть на постпланковских временах, когда необходимость квантования гравитации исчезает. Заметим, что как известно (см., например, [2]), согласно современным наблюдениям для решения проблем горизонта и плоскостности вселенной достаточно длительность инфляции $10^{-42} \div 10^{-9}$ с (см., например, [2]), т.е., достаточно послепланковская инфляция $t \sim 10 \div 10^{24}$ в планковских масштабах времени. В эти масштабы укладываются даже длительности всплесков космологического ускорения. Далее отметим очень важный факт, выявленный в данном исследовании. В ходе космологической эволюции естественно образуются нерелятивистские этапы, как ранние (3-й тип сценария), так промежуточные (четвертый тип сценария) и конечные (2-й тип сценария). Существование этих этапов даст возможность развития гравитационной неустойчивости, следовательно, образование космической структуры. При этом 2-й и 4-й типы сценария ограничивают сверху и снизу масштаб неустойчивых мод $kt > 1$. Таким образом, на основе модели с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, по-видимому, возможно создание более полной космологической модели, способной описать основные наблюдательные данные.

В заключении Авторы выражают благодарность членам MW - семинара по релятивистской кинетике и космологии Казанского федерального университета за полезное обсуждение работы.

⁵ В работе [19] приводятся примеры всплесков космологического ускорения до $\Omega \sim 10^8 \div 10^{10}$.

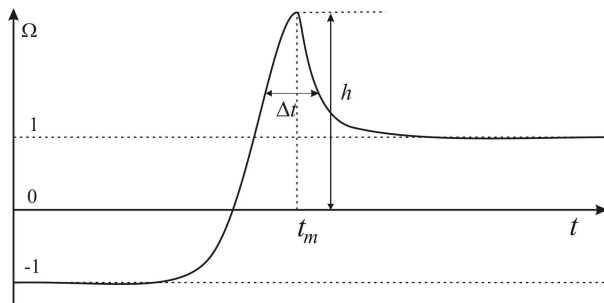


Рис. 17. Первый тип космологического сценария. Этому сценарию отвечают следующие характерные параметры: $t_m \sim 10^{-1} \div 10^3$; $\Delta t \sim 2$; $h \sim 10$, т.е., ранний всплеск ускорения и ранний переход на инфляционную стадию.

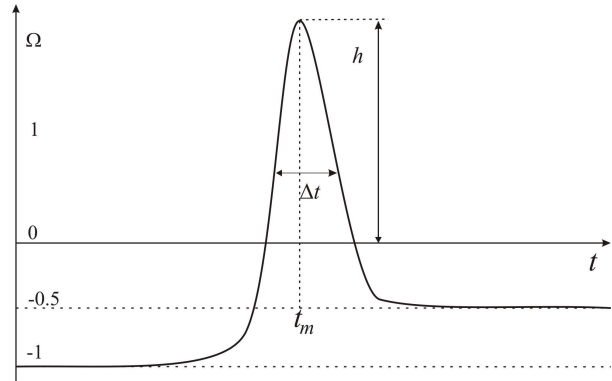


Рис. 18. Второй тип космологического сценария. Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_m \sim 10^6 \div 10^9$; $\Delta t \sim 10^6$; $h \sim 10$, т.е., достаточно длительный промежуточный этап сверхускорения с окончательным переходом на нерелятивистскую стадию.

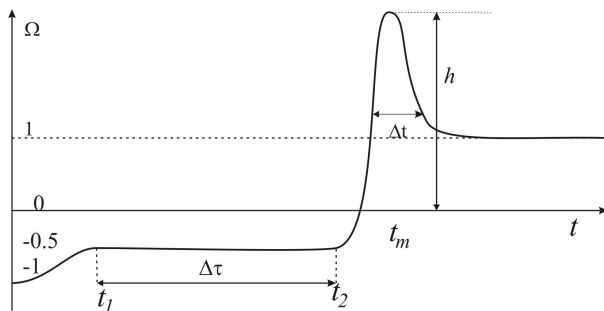


Рис. 19. Третий тип космологического сценария. Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_1 \sim 10^2$ (время смены ультрарелятивистской стадии на нерелятивистскую стадию); $\Delta \tau = 10^3 \div 10^8$ (длительность нерелятивистской стадии), $t_m \sim 10^2 \div 10^9 \div 10^9$, $h \sim 2 \div 3$, $\Delta t \sim 10^6 \div 10^8$.

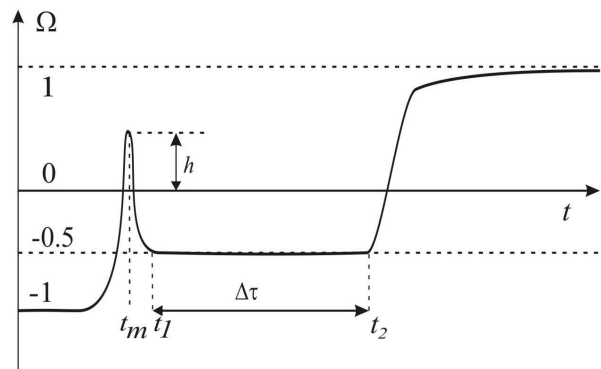


Рис. 20. Четвертый тип космологического сценария. Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_m \sim 10^2 \div 10^6 \div 10^9$, $t_1 \sim 10^2 \div 10^6$ (начало нерелятивистской стадии); $\Delta \tau \sim 10^7$ (длительность нерелятивистской стадии), $h \sim 0.5$.

Литература

1. Weinberg S. Cosmology / S. Weinberg. - Oxford University Press, 2008.
2. Gorbunov D.S. Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory / D.S. Gorbunov, V.A. Rubakov. - Singapore: World Scientific, 2011.
3. Einstein A. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity / A. Einstein // Sitzungsher. preus, Akad. Wiss. - 1917. - №1. - P. 142-152.
4. Utiyama R. Gravitational Field as a Generalized Gauge Field / R. Utiyama, T. Fukuyama // Progr. Theor. Phys. - 1971. - № 45. - P. 612-627.
5. Minkevich A.V. Gauge Approach to Gravitation and Regular Big Bang Theory / A.V. Minkevich // Gravitation and Cosmology. - 2006. - №12. - P. 11-20.

6. Minkevich A.V. Regular accelerating Universe without dark energy / A.V. Minkevich, A.S. Garkun, V.I. Kudin // *Classical and Quantum Gravity*. - 2007. - № 24. - P. 5835-5848.
7. Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity / A.A. Starobinsky // *Physics Letters*. - 1980. - № 91(1). - P. 99-102.
8. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic theory and conformal transformations / Yu.G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. - 1982. - № 25(4). - P. 372-375.
9. Ignat'ev Yu.G. Relativistic canonical formalism and the invariant single-particle distribution function in the general theory of relativity / Yu.G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. - 1983. - № 26(8). - P. 686-690.
10. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic equations for inelastically interacting particles in a gravitational field / Yu.G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. - 1983. - № 26(8). - P. 690-694.
11. Ignat'ev Yu.G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles / Yu.G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. - 1983. - № 26(12). - P. 1068-1072.
12. Ivanov G.G. Stationary macroscopic motions of a relativistic gas and its relation to the symmetries of the gravitational field / G.G. Ivanov // *Russian Physics Journal*. - 1983. - № 26(1). - P. 579-584.
13. Ignatyev Yu. G. Statistical systems with phantom scalar interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models / Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov, D.Yu. Ignatyev // *Gravitation and Cosmology*. - 2014. - № 20(4). - P. 304--308.
14. Ignat'ev Yu.G. Collisionless self-gravitating statistical systems of scalarly interacting particles / Yu.G. Ignat'ev // *Gravitation and Cosmology*. - 2016. - № 22(1). - P. 20-25.
15. Ignatyev Yu. G. Relativistic Kinetic Theory of Statistical Systems with Conformally Invariant Interparticle Scalar Interaction / Yu.G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. - 2016. - № 59(1). - P. 20-28.
16. Ignat'ev Yu.G. Statistical Cosmological Systems of Strongly Degenerate Scalar Charged Fermions / Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov // *Space, Time and Found. Interact.* - 2016. - № 1(14). - P. 91-103.
17. Ignatyev Yu. G. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles / Yu. G. Ignatyev, A. A. Agathonov // *Gravitation and Cosmology*. - 2015. - № 21(2). - P. 105-112.
18. Ignat'ev Yu.G. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases / Yu.G. Ignat'ev, M. L. Mikhailov // *Russian Physics Journal*. - 2015. - № 57(12). - P. 1743-1752.
19. Ignat'ev Yu.G. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles / Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov, M.L. Mikhailov, D.Yu. Ignatyev // *Astroph. Space Sci.* - 2015. - № 357(61).
20. Ignat'ev Yu.G. Establishment of thermodynamic equilibrium in cosmological model with an arbitrary acceleration / Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) // *Gravitation and Cosmology*. - 2013. - № 19(4). - P. 232 - 247. - Access mode: <https://arxiv.org/abs/1306.3633/>.